147 | Courbes planes paramétrées. | Allure en un point normal, d'inflexion, de rebroussement, exemple. | Monier géométrie, Sorosina.

On note P le plan affine Euclidien muni d'un repère orthonormé $R\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et d'un produit scalaire.

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Monier p.196.

I. Définitions.

Def 1 : On appelle **arc paramétré de classe C^k** toute application f: I → P de classe C^k.

Interprétation cinématique: Un mvt ponctuel est un arc paramétré dt la vble t est le temps. f'(t) est la vitesse, f''(t) l'accélération.

Def 2: On appelle **trajectoire** de f la partie $\Gamma=\{f(t);t\in I\}$ du plan P.

On dit aussi que Γ est une **courbe** admettant f pour représentation paramétrique (RP).

Def 3: On appelle **changement de paramétrage** (C^k) de f toute application $\varphi : J \to I$, où J est un intervalle de ℝ,

tq: $\begin{cases}\varphi\in C^k(J)\\ \varphi \text{ est bijective} \\ \varphi^{-1}\in C^k(I)\end{cases}$ (2) – C^k-difféomph.

Remarque: f et foφ sont deux arcs paramétrés ayant la même trajectoire.

Def 4: On dit que deux arcs paramétrés f et g sont **C^k-équivalents** ssi il existe un changement de paramétrage (C^k) φ tel que g = foφ.

Prop 1: La relation " C^k – équivalent " est une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs paramétrés de classe C^k.

Def 5: On appelle **courbe de classe C^k** du plan une classe d'équivalence pour cette relation d'équivalence.

De plus, si φ est ↗, les arcs f et foφ sont de même sens. Ainsi, l'ens. des chgts de paramétrage est partitionné entre les φ' >0 et les φ'<0. On appelle orientation de f le choix de l'un de ces deux ensembles.

II. Etude locale en un point .

$f(t)$ est la position du point matériel, $\overrightarrow{Of(t)}$ le vecteur position, $\overrightarrow{f'(t)}$ le vecteur vitesse et $\overrightarrow{f''(t)}$ le vecteur accélération.

A. Tangente en un point.

Def 6: Soient f un arc paramétré de classe C^1, Γ sa trajectoire, M(t) un point de Γ. On dit que M(t) est un **point régulier** de Γ ssi $\overrightarrow{f'(t)}\neq 0$.

Si f est C^2, on dit que M(t) est **birégulier** ssi la famille $\left(\overrightarrow{f'(t)},\overrightarrow{f''(t)}\right)$ est libre. (3)

On dit qu'un arc est régulier (resp. birégulier) ssi tous ses points le sont.

Les notions de pt régulier/birégulier sont invariantes par changement de paramétrage, donc on parlera de courbe régulière ou birégulière.

Def 7: Soient f un arc paramétré, Γ la trajectoire de f, $t_0\in I$, $A=M(t_0)=A(t_0)$.

-> Γ admet une **demi-tangente** en $A(t_0^+)$ ssi $\dfrac{\overrightarrow{AM(t)}}{\left\|\overrightarrow{AM(t)}\right\|}$, s'il existe, admet une limite lorsque $t\to t_0^+$. Dans ce cas, il s'agit de la demi-droite d'origine A, dirigée et orientée par cette limite. On a la même définition en t_0^-.

-> Γ admet une **tangente** en $A(t_0)$ ssi elle admet deux demi-tangentes égales ou opposées en $A(t_0^+)$ et $A(t_0^-)$. Ce sera la droite passant par A et portant les demi-tgtes

Cette notion est invariante par chgt de paramétrage.

Prop 2: Soient f un arc C^k de trajectoire Γ, t∈I, A(t)=f(t). Si l'un au moins des vecteurs dérivés successifs $\overrightarrow{f'(t)},\dots,\overrightarrow{f^{(k)}(t)}$ est non nul, alors Γ admet en A(t) une tangente, dirigée par le premier vecteur dérivé non nul.

Conséquence: Si M(t) est régulier, Γ y admet une tangente dirigée par $\overrightarrow{f'(t)}$.

B. Allure au voisinage d'un point.

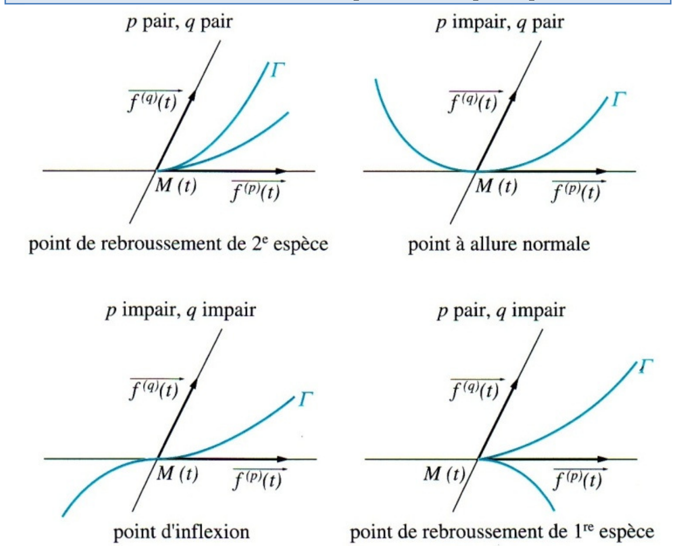
Au voisinage d'un point M(t), un point birégulier de Γ se trouve dans le demi-plan délimité par sa tangente et "tourne sa concavité du côté de $\overrightarrow{f''(t)}$. (4)

Prop 3: Soient $f:I\to P$ un arc paramétré de classe suffisante, Γ sa trajectoire, t∈I. On note:

p le plus petit entier ≥1 tel que $\overrightarrow{f^{(p)}(t)}\neq 0$

q le plus petit entier > p tq $\left(\overrightarrow{f^{(p)}(t)},\overrightarrow{f^{(q)}(t)}\right)$ soit libre

(On suppose que p, q existent). Au voisinage de M(t), Γ a l'allure suivante selon les parités de p et q:



Exemple: La courbe Γ de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=t^4+4t^3+6t^2\\ y=2t^3+3t^2\end{cases}$ admet un pt de rebrousst de 2° espèce au voisinage de M(0). (Sorosina 13.4 p.394)

III. Branches infinies.

Soit $t_0 \in \overline{I} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Def 8: On dit que Γ admet une **branche infinie** lorsque t → t₀ ssi $\left\|\overrightarrow{f(t)}\right\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$. Dans ce cas:

1) Γ admet une **direction asymptotique** ssi ∃A∈P tq $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\overrightarrow{AM(t)}}{\left\|\overrightarrow{AM(t)}\right\|} = \vec{u}$ existe. Alors $\mathbb{R}\vec{u}$ est la dir° asympt.

2) Γ admet une **asymptote** D= $\mathbb{R}\vec{u}$ ssi $\exists \vec{v}$ tq $(\vec{u},\vec{v})$ soit libre, et en notant $M(t) = (X(t), Y(t))$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ on ait: $\begin{cases} X(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \pm\infty \\ Y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} b \in \mathbb{R} \end{cases}$ (indep du choix de $\vec{v}$)

→Lorsque Γ admet une direction asymptotique et pas d'asymptote, on dit que Γ admet une **branche parabolique.** (5)

<u>Exemple</u>: $\Gamma \begin{cases} x = \dfrac{3}{t(t-2)} \\ y = \dfrac{t^2-3}{t} \end{cases}$ admet une direction asymptotique d'équation y=2x lorsque t→0.

IV. Symétries.

On cherche des isométries laissant Γ globalement invariante, i.e. un chgt de paramétrage Ψ tel que, par ex:

$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases}$	Identité
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\psi(t)) = y(t) + \beta \end{cases}$	Translation de vecteur $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$
$\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rpt à (y'y), parallèlemt à (x'x)
$\begin{cases} x(\psi(t)) = x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rpt à (x'x), parallèlemt à (y'y)
$\begin{cases} x(\psi(t)) = -x(t) \\ y(\psi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à O
$\begin{cases} x(\psi(t)) = y(t) \\ y(\psi(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la 1ère diagonale

V. Points multiples.

Def 9: Un point M(x,y) de Γ est dit **point multiple** ssi ∃(u,v)∈I² tels que: $\begin{cases} x = x(u) = x(v) \\ y = y(u) = y(v) \\ u \neq v \end{cases}$

On dit selon les cas que M est un point double, triple, quadruple... de Γ.

<u>Exemple</u>: M(-1;3) est un point double de $\begin{cases} x = t + 1 + \dfrac{1}{t-1} \\ y = t^2 + 1 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$ correspondant à $u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $v = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

VI. Notes.

(1)**Différence courbe/arc paramétré/support**:
Arc paramétrée plan (I intervalle): c'est la donnée d'un couple (I, f). Une courbe paramétérée est la réunion de plusieurs arcs, ou, ce qui revient au même au même, la donnée d'un couple (I,f) où I n'est plus forcément un intervalle.
Donner le support est inutile car il est forcément défini par la simple donnée de (I,f). En revanche, le support n'est PAS la courbe en le sens que les points du support peuvent être atteints plusieurs fois par la courbe.Certains ouvrages appellent "courbe" le support (ie la "trace graphique").

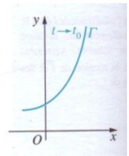
(2) Il suffit de vérifier que φ'>0 ou φ'<0.
On appelle ***paramétrage admissible*** (C^k) toute application g : J→P tq. ∃ un changement de paramétrage (C^k) φ de f tel que g = foφ.

(3) Ne pas confondre avec un mvt à accélération centrale de centre A, où la famille $\left(\overrightarrow{Af}(t), \overrightarrow{f''}(t)\right)$ est liée.

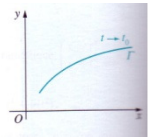
(4) **Quelques astuces de calcul**:
Le calcul des dérivées successives peut être remplacé par l'utilisation d'un dvt de Taylor.
Pour les pts de rebroussement de 2° espèce, il faut distinguer les deux branches de Γ, en 0+ et en 0-.
Les points d'inflexion de Γ peuvent être cherchés parmi les solutions de x'(t).y''(t) – x''(t).y'(t) = 0, et prendre ceux pour lesquels p et q sont impairs.

(5) En pratique:

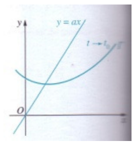
Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$, branche parabolique verticale.



Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to 0$, branche parabolique horizontale.



Si $\begin{cases} \dfrac{y(t)}{x(t)} \to a \in \mathbb{R}^* \\ y(t) - a.x(t) \to \pm\infty \end{cases}$, branche para de dir° y=ax



Si $\begin{cases} \dfrac{y(t)}{x(t)} \to a \in \mathbb{R}^* \\ y(t) - a.x(t) \to b \in \mathbb{R} \end{cases}$, bche para. de dir° y=ax+b.